黒木玄 **Gen Kuroki**
@genkuroki

mathtod.online/@_eq/266837

これは良い質問↑

$SU(2)$ の既約ユニタリー表現、$\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ の最高ウェイト既約表現でユニタリーなもの、$\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ の有限次元既約表現は全部同じもの。

「有限次元表現になる」とか、「ユニタリーになる」という条件を課せば、$m_1 = -j-1$ を排除できます。

「ユニタリーになる」の方で確認すると、

$$-\sqrt{j(j+1)} \le m_1 \le \sqrt{j(j+1)}$$

から、$m_1 = -j-1$ が排除されます。

同様の計算を sl_3 でやり出すと、最高ウェイト表現の理論のありがたみがわかります。

2017年06月14日 15:26 · Web · 0 · 1 · Webで開く

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 6 hours ago
最高ウェイト λ を持つ最高ウェイト表現とは次の最高ウェイト条件を満たすベクトル $v \ne 0$ から生成される側の表現のことです:

$$H_i v = \lambda_i v, \quad E_i v = 0.$$

ここで、表現される代数は生成元が

$$H_i, E_i, F_i$$

\たちで、基本関係式が

$$\begin{aligned}
[H_i, H_j] &= 0, \\
[H_i, E_j] &= a_{ij} E_j, \\
[H_i, F_j] &= -a_{ij} F_j, \\
[E_i, F_j] &= \delta_{ij} H_i
\end{aligned}$$

およびSerre(セール)関係式であるものです。ここで、$[a_{ij}]$ はCartan行列もしくはその一般化です。

E_i, F_i が昇降演算子の抽象化。物理の教科書っぽい記号では、$J_{i,\pm}$ のように書きたくなるかもしれない。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 6 hours ago

同一の最高ウェイトを持つ最高ウェイト表現の中には(始対象の方の)親玉がいて、Verma表現 $M(\lambda)$ と呼ばれています。最高ウェイト条件以外に関係式がない表現がVerma表現です。

表現が 0 に潰れてしまわない限界まで最高ウェイト条件以外の関係式を増やして得られる表現が最高ウェイト既約表現 $L(\lambda)$ です。

最高ウェイト表現だけだと、最高ウェイト λ (先の sl_2 のケースでは $\lambda=2j$)には何も制限がつかないのですが、「有限次元」「ユニタリー」「可積分」などの条件を課すと「物理的に必要な制限」が得られる仕組みになっています。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 6 hours ago

例えば、「可積分」という条件は「各 i ごとに十分に N を大きくすると

$$F_i^N v = 0$$

となる」という条件のことです。

sl_2 の場合には

$$\begin{gathered}[H,E]=2E,\\ [H,F]=-2F,\\ [E,F]=H\end{gathered}$$

であり、可積分な最高ウェイト表現を生成する最高ウェイトベクトル $v \neq 0$ に関する条件は

$$\begin{aligned}&Hv=\lambda v,\\ &Ev=0,\\ &F^N v=0 \quad (\exists\, N\in\mathbb{Z}_{>0})\end{aligned}$$

になります。この条件から、

$$\begin{gathered}\lambda=2j\in\mathbb{Z}_{\geqq 0},\\ F^{\lambda+1}v=0\end{gathered}$$

を導けます。

物理の教科書的には j は非負の半整数になり、$v=|j,j\rangle$ で

$$\begin{aligned}&J_-^{2j+1}|j,j\rangle\\ &=\mathrm{const.}|j,-j-1\rangle\\ &=0\end{aligned}$$

となるという話です。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 6 hours ago

私も学生時代には sl_2 の表現論には数学ではなく、物理の教科書の方で先に出会ったのですが、出発点として採用している仮定が明瞭でない点が気になりました。

その後、数学の本でコンパクトLie群と有限次元複素単純Lie環の表現論を学んですっきりしました。

何の制限も付かないVerma表現(親玉)を簡単に作ることができて、その部分表現たちの様子が全部わかれば、特に既約表現のこともわかる。

あとでそういう方向での深い予想であるKazhdan-Lusztig予想の重要性を教わることになりました。

様々な数学的大理論の威力がどの程度であるかが、KL予想の周辺で明らかになりました。D加群に関するRiemann-Hilbert対応、混合Hodge加群の理論や ℓ 進層に関するウェイトの理論などなど。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 5 hours ago

$\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, F^{\lambda+1} v = 0$ の証明

準備:

$$EF = FE + H,$$
$$HF = F(H-2)$$

を使うと、正の整数 k について、

$$\begin{aligned} EF^k &= F^k E + HF^{k-1} + FHF^{k-2} + \cdots + F^{k-1} H \\ &= F^k E + F^{k-1}((H - 2(k-1)) + (H - 2(k-2)) + \cdots + H) \\ &= F^k E + F^{k-1}(kH - k(k-1)) \\ &= F^k E + F^{k-1} k(H - k + 1) \end{aligned}$$

なので

$$Hv = \lambda v,$$
$$Ev = 0$$

より、

$$EF^k v = k(\lambda - k + 1) F^{k-1} v.$$

ゆえに $EF^k v = 0, F^{k-1} v \neq 0$ ならば $\lambda = k - 1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ となる。

続く

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 5 hours ago

続き

ある正の整数 N が存在して $F^N v = 0$ となると仮定する(可積分条件)。

そのような最小の N を k と書こう。もしも

$$EF^k v = k(\lambda - k + 1) F^{k-1} v \neq 0$$

だとすると、k の最小性に反するので $EF^k v = 0$ となり、k の最小性より $F^{k-1} v \neq 0$ でもある。

上で準備した結果と合わせると、

$$\lambda \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}, \quad F^{\lambda+1} v = 0.$$

以上は、ユニタリー性を一切使用せずに、可積分性だけから得られる結果です。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 5 hours ago

証明と計算を書くのが大好き。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 5 hours ago

以上と全く同じ計算と証明を $[E, F] = H$ を

$$[E, F] = \frac{q^H - q^{-H}}{q - q^{-1}}$$

で置き換えた場合にも実行できます。ただし、

$$\begin{aligned} q^H v &= q^\lambda v, \\ q^H E q^{-H} &= q^2 E, \\ q^H F q^{-H} &= q^{-2} F \end{aligned}$$

などとしておきます。

すでに $J_z, J_\pm$ のような記号で sl_2 の表現の計算をしたことがある人にとっては易しいことでしょう。

そしてその易しい計算を実行した人は、量子展開環 $U_q(\mathrm{sl}_2)$ の表現論に入門して来たことになります。

この経路は量子群入門の最短経路だと思います。大学1〜3年レベルの計算。

パラメーター q が入ったこのタイプの表現論は量子可積分系の対称性として自然に出て来ることで発見されました。

mathtod.online powered by Mastodon